

Grebenshchikov B.G., Lozhnikov A.B. ON ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTION OF AN INHOMOGENEOUS SYSTEM WITH LINEAR DELAY

The asymptotic properties of the solution and its derivative of an inhomogeneous system of differential equations with constant coefficients and linear delay are considered.

Key words: linear delay; asymptotic properties of solutions.

УДК 517.977

ОБ АСИМПТОТИКЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© И.В. Гребенникова, А.Г. Кремлев

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием; оптимальное управление; фундаментальная матрица.

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. Предлагается процедура построения начального приближения управляющего воздействия в минимаксной задаче управления.

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_1(t)x(t-h) + B_1(t)u(t), \\ mdy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_2(t)x(t-h) + B_2(t)u(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$; $x \in R^n$, $y \in R^m$; $u \in R^r$ — управление. Начальное состояние системы (1) $x(t) = \psi(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ точно неизвестно, и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0 , Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi(t) \in \Psi(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $\Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов, непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Управление $u(t)$, $t \in T$ — измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$.

Рассматривается минимаксная задача управления: среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее

$$\varepsilon^0(t_1, \mu) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot)), \quad (2)$$

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi\left(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))\right),$$

где $\varphi(\cdot)$ заданная выпуклая функция (с конечными значениями); $z' = (x', y')$, $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$, $t \in T$ — решение системы (1), исходящих из $Z_0 = X_0 \times Y_0$ при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$. Выполнено условие экспоненциальной устойчивости для подсистемы быстрых переменных.

Оптимальное управление $u^0(\cdot, \mu)$ и величина $\varepsilon^0(t_1, \mu)$ зависят от параметра μ . Однако эти характеристики при $\mu \rightarrow +0$ могут не сходиться [1] к соответствующим решениям задачи (2) для вырожденной системы, полученной из (1) при $\mu = 0$. Поэтому важным

представляется построение аппроксимации оптимального управления $u^0(\cdot, \mu)$, доставляющей оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot, \mu))$ с заданной точностью (относительно μ). В основе предлагаемого метода лежат идеи выделения асимптотики ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы, предложенные А.Г. Кремлевым в работе [2], но при отсутствии запаздывания и представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных переменных, в виде равномерно сходящейся последовательности [1].

Вычисляя в соответствии с [1], при $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало, имеем:

$$\varepsilon^0(t_1) = \varepsilon^{(0)}(t_1) + o(1),$$

$$\varepsilon^{(0)}(t_1) = \max\{\chi^{(0)}(p, q) \mid p \in R^n, q \in R^m\} = \chi^{(0)}(p^{(0)}, q^{(0)}),$$

$$\chi^{(0)}(p, q) = -h_0^{**}(p, q) - \int_{t_0}^{t_1} \rho(-w'(\tau, p, q)B_0(\tau) \mid P(\tau))d\tau - \int_0^\infty \rho(-q'\Phi_0[t_1, s]B_2(t_1) \mid P(t_1))ds;$$

$$h_0(p, q) = \varphi^*(p, q) - \rho(w'(t_0, p, q) \mid X_0) - \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(w'(\tau, p, q)G_0(\tau) \mid \Psi(\tau-h))d\tau,$$

$w'(\tau, p, q) = s'(t_1, p, q)X[t_1, \tau] - q'A_{22}^{-1}(t_1)G_2(t_1)X[t_1-h, \tau]$, $s'(t_1, p, q) = p' - q'A_{22}^{-1}(t_1)A_{21}(t_1)$, где $G_0(t) = G_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)G_2(t)$, $B_0(t) = B_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t)$, $X[t, \tau]$ — фундаментальная матрица решений вырожденной системы (система (1) при $\mu = 0$), причем $X[\tau, \tau] = E$, $X[t, \tau] = 0$ при $\tau > t$; $\Phi_0[t_1, s]$ — фундаментальная матрица решений системы $d\Phi_0[t_1, s]/ds = \Phi_0[t_1, s]A_{22}(t_1)$, $\Phi_0[t_1, 0] = E$; $\varphi^*(p, q)$ — функция, сопряженная к $\varphi(p, q)$; $h^{**}(p, q) = \overline{(co h)}(p, q)$ — замыкание выпуклой оболочки функции $h(p, q)$; $\rho(q|X)$ — опорная функция множества X на элементе q .

Рассмотрим управляющее воздействие $u_\mu^{(0)}(\cdot)$:

$$u_\mu^{(0)}(\tau) = \begin{cases} u^{(0)}(\tau), & t_0 \leq \tau \leq t_1 - \alpha(\mu), \\ v^{(0)}((t_1 - \tau)/\mu), & t_1 - \alpha(\mu) < \tau \leq t_1, \end{cases}$$

где $\alpha(\mu) > 0$, $\alpha(\mu) = o(1)$, $\alpha(\mu)/\mu \rightarrow +\infty$ при $\mu \rightarrow +0$;

$u^{(0)}(\cdot)$, $v^{(0)}(\cdot)$ определяются условиями:

для почти всех $\tau \in [t_0, t_1]$

$$w'(\tau, p^{(0)}, q^{(0)})B_0(\tau)u^{(0)}(\tau) = \min_{u(\tau) \in P(\tau)} w'(\tau, p^{(0)}, q^{(0)})B_0(\tau)u(\tau);$$

для почти всех $s \geq 0$

$$q^{(0)}\Phi_0[t_1, s]B_2(t_1)v^{(0)}(s) = \min_{v(s) \in P(t_1)} q^{(0)}\Phi_0[t_1, s]B_2(t_1)v(s).$$

Т е о р е м а. Пусть выполнены предположения 1.2(i), 2.1 [1]. Тогда задача (2) разрешима, причем при $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало, управляющее воздействие $u_\mu^{(0)}(\cdot)$ доставляет функционалу J значение

$$J(u_\mu^{(0)}(\cdot)) = \varepsilon^{(0)}(t_1).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гребенникова И.В. Аппроксимация решения в минимаксной задаче управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Известия вузов. Математика. Казань. 2011. №. 10. С. 28-39.
2. Кремлев А.Г. Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // Автоматика и Телемеханика. М.: 1993. № 9. С. 61-78.

Grebennikova I.V., Kremlev A.G. ON ASYMPTOTIC OF PROBLEM OF CONTROL FOR SINGULARLY PERTURBED SYSTEM WITH DELAY

The problem of control for the singularly perturbed delay system with the minimax criterion is considered. Procedure is proposed for construction initial approximation of control response for minimax problem of control.

Key words: singularly perturbed system with delay; optimal control; fundamental matrix.

УДК 517.9

ДИНАМИЧЕСКАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© Е.И. Грибанова

Ключевые слова: динамическая система; граничное управление; динамическая регуляризация.

Описывается метод динамической регуляризации, применяемый для восстановления граничных управлений в гиперболической системе. Показано, что построенный алгоритм позволяет получить кусочно-равномерную сходимость регуляризованных приближений. Выполнена конечномерная аппроксимация задачи и проведено численное моделирование.

Рассматривается задача реконструкции неизвестных граничных управлений, функционирующих в гиперболической системе. Для решения задачи привлекается метод динамической регуляризации [1]. Работа продолжает исследования [2, 3].

Пусть управляемая динамическая система на конечном отрезке времени $T = [t_0, \vartheta]$ описывается гиперболической краевой задачей [4, гл. 4]

$$y_{tt} = Ay + f(t, x) \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) - a(x)y + f(t, x), \quad (t, x) \in Q = T \times \Omega;$$

$$y(t_0, x) = y_0(x), \quad y_t(t_0, x) = y_1(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n;$$

$$\frac{\partial y}{\partial N} + \nu y = g(x)u(t), \quad t \in T, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad \nu = \text{const} \geq 0;$$

эллиптический оператор в правой части уравнения коэрцитивен [4, гл. 3, § 3], $a_{ij} = a_{ji} \in L_\infty(\Omega)$, $a \geq a_0 = \text{const} \geq 0$, $a \in L_\infty(\Omega)$, $f \in L_2(Q)$, $g \in L_2^m(\Gamma)$, $y_0 \in L_2(\Omega)$, $y_1 \in W_2^1(\Omega)^*$, управление $u \in L_2(T; \mathbb{R}^m)$, $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m$, $t \in T$ (P — выпуклый компакт).

Пусть в соответствующие текущие моменты времени $t \in T$ приближенно измеряются скорости системы $y_t[t]$, причем результаты этих измерений $y_t^{(\delta)}[t]$ удовлетворяют условию $\|y_t^{(\delta)}[t] - y_t[t]\|_{W_2^1(\Omega)^*} \leq \delta$, $0 \leq \delta \leq \delta_0$. Задача восстановления состоит в том, чтобы построить динамический алгоритм $D: y_t^{(\delta)} \rightarrow u_\delta$, восстанавливающий ту реализацию u управляющего воздействия на динамическую систему, которая порождает наблюдаемое движение системы. При этом результат $u_\delta = u_\delta(t)$, $t \in T$, восстановления искомого управления $u = u(t)$, $t \in T$, должен быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений: $u_\delta \rightarrow u$, $\delta \rightarrow 0$.